УДК 517.929

**Ю. Ф. Долгий**

# ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ*

## 1. Оператор монодромии

Линейная периодическая система дифференциальных уравнений с последействием описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-r}^{0} d_s\eta(t,s)x(t+s), \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty), \tag{1.1}$$

где $x : [-r,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Матричная функция $\eta$ локально измерима по Лебегу на множестве $\mathbb{R}^+ \times [-r,0]$ и $\eta(\cdot,0) = 0$. Для почти всех $t \in \mathbb{R}^+$ существует конечная вариация $v(t) = Var_{[-r,0]}\eta(t,\cdot)$. Функция $v$ является локально интегрируемой функцией на $\mathbb{R}^+$. Матричная функция $\eta$ является $\omega$-периодической функцией первого аргумента, $\omega > 0$.

При указанных выше условиях векторное дифференциальное уравнение с последействием (1.1) для начального момента $t_0 = 0$ и произвольной начальной функции $\varphi \in \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $x(\cdot,\varphi) : [-r,+\infty) \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее начальному условию $x(s,\varphi) = \varphi(s)$ при $s \in [-r,0]$ [1, с.56]. При определении пространства $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть выбрана любой. Качественное поведение решений векторного дифференциального уравнения с последействием (1.1) удобно описывать в функциональном пространстве состояний $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, выбирая в качестве элементов решений функции $x_t(\vartheta,\varphi) = x(t+\vartheta,\varphi)$, $\vartheta \in [-r,0]$, $t \geq 0$ [2, с.157]. Устойчивость решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием можно описать в терминах спектра оператора монодромии $U$, определяемого формулой $U\varphi = x_\omega(\cdot,\varphi)$. Это линейный непрерывный оператор, действующий в пространстве $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$. Решения векторного дифференциального уравнения с последействием сглаживаются при возрастании времени [3, с.39]. Следовательно, степень оператора монодромии

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №96-01-00321.

может принадлежать более узкому классу операторов, чем класс операторов, которому принадлежит сам оператор монодромии. Поэтому задачу изучения спектра оператора монодромии мы заменим задачей изучения спектра его степени $U^m$ ($m\omega \geq 2r$). Оператор $U^m$ является вполне непрерывным, и его спектр состоит не более чем из счетного числа собственных чисел и числа 0. Справедлива

**Теорема 1.1.** (См. [4].) *Для асимптотической устойчивости решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии имели модули меньше единицы. Для устойчивости решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии имели модули, не превосходящие единицы, а для любого собственного числа с модулем, равным единице, его собственное подпространство совпадало с корневым подпространством.*

Утверждения теоремы 1.1 остаются справедливыми, если в ее формулировке оператор монодромии заменить степенью $U^m$ ($m\omega \geq 2r$), т.е. характеризовать свойства асимптотической устойчивости (или устойчивости) решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием (1.1) в терминах спектра степени оператора монодромии $U^m$. Обратные величины $z_j = 1/\varrho_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) ненулевых собственных чисел $\varrho_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) оператора $U^m$ имеют единственную предельную точку на бесконечности. Поэтому существует целая функция, для которой числа $z_j = 1/\varrho_j$ ($j = 1, 2, \ldots$) и только они являются нулями этой функции. Вид искомой целой функции зависит от скорости убывания собственных чисел степени оператора монодромии. Занумеруем собственные числа в порядке невозрастания модулей, т.е. $|\varrho_1| \geq |\varrho_2| \ldots$ . Если ненулевых собственных чисел конечное число, то их конечную последовательность дополним до бесконечной нулями. Рассмотрим простую ситуацию, когда выполнено условие $\sum_{j=1}^{\infty} |\varrho_j| < \infty$. Тогда искомая целая функция определяется формулой Вейерштрасса $D(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \varrho_j z)$, $z \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел), [5, с.277]. Ниже будут предложены конструктивные методы нахождения целой функции $D(z)$. При известной функции $D(z)$ ненулевые собственные числа степени оператора монодромии $U^m$ ($m\omega \geq 2r$) находятся как обратные величины корней уравнения $D(z) = 0$ (характеристического уравнения). В настоящее время известны методы построения характеристических уравнений только для специальных классов линейных периодических систем дифференциальных уравнений с сосредоточенными запаздываниями [6],[7]. Ранее автором разрабатывались методы построения характеристического уравнения для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с сосредоточенным переменным запаздыванием [8]. В данной работе предложено решение задачи построения характеристического уравнения для линейных периодических систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием.

## 2. Характеристическое уравнение

Выше мы установили, что при построении характеристического уравнения необходимо иметь информацию о скорости убывания собственных чисел степени оператора монодромии $U^m$ $(m\omega \geq 2r)$. Проще всего получить эту информацию для вполне непрерывных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Для таких операторов скорость убывания собственных чисел можно косвенно оценить через скорость убывания их $s$-чисел [9, с.63]. При таком способе оценки скорости убывания собственных чисел мы можем эту скорость занизить [8], но сведем нашу задачу к более простой задаче оценки скорости убывания $s$-чисел вполне непрерывного оператора (собственных чисел самосопряженного вполне непрерывного оператора). Последняя задача хорошо исследована в абстрактной постановке. Поэтому при решении нашей задачи можно воспользоваться полученными в функциональном анализе теоретическими результатами.

Попытаемся расширить пространство $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ по непрерывности на специальное гильбертово пространство. В пространстве $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ введем скалярное произведение элементов $\varphi$ и $\psi$ с помощью формулы

$$(\varphi,\psi) = \psi^\tau(0)\varphi(0) + \int_{-r}^{-0} \psi^\tau(s)\varphi(s)ds. \tag{2.1}$$

Здесь $\tau$ — значок транспонирования. При использовании этого скалярного произведения удобно произвольному элементу $\varphi$ пространства $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ ставить в соответствие пару $(\tilde{\varphi},\varphi_0)$, где $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s)$ при $-r \leq s < 0$ и $\varphi_0 = \varphi(0)$, отождествляя эту пару с функцией $\varphi$. При построении расширения пространства $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ пространство $\mathbb{R}^n$ заменим на пространство $\mathbb{E}^n$, т.е. $n$-мерное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\varphi_0,\psi_0) = \psi_0^\tau\varphi_0$ для элементов $\varphi_0$ и $\psi_0$ этого пространства. Поэтому дальше будем использовать другое обозначение для пространства непрерывных функций $\mathbf{C} = \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n)$. Вектор $\varphi_0$ будем рассматривать как элемент евклидова пространства $\mathbb{E}^n$. Функцию $\tilde{\varphi}$ будем рассматривать как элемент гильбертова пространства $\mathbf{L}_2([-r,0),\mathbb{E}^n)$ со скалярным произведением $(\tilde{\varphi},\tilde{\psi}) = \int_{-r}^{-0} \psi^{\tau}(s)\varphi(s)ds$ для элементов $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\psi}$ этого пространства. Отметим, что функции, принадлежащие пространству $\mathbf{L}_2([-r,0),\mathbb{E}^n)$, определены на полуинтервале $[-r,0)$, т.е. мы отказались от требования компактности множества, на котором определены эти функции [10, с.164]. Тогда пара $\Phi = (\tilde{\varphi},\varphi_0)$ будет элементом гильбертова пространства $\mathbb{H} = \mathbf{L}_2([-r,0),\mathbb{E}^n) \times \mathbb{E}^n$ со скалярным произведением $(\Phi,\Psi) = \psi_0^{\tau}\varphi_0 + \int_{-r}^{-0} \tilde{\psi}^{\tau}(s)\tilde{\varphi}(s)ds$ для элементов $\Phi = (\tilde{\varphi},\varphi_0)$ и $\Psi = (\tilde{\psi},\psi_0)$ этого пространства. Описанная конструкция позволяет совершить обратную операцию — произвольному элементу пространства $\mathbb{H}$, т.е. паре $(\tilde{\varphi},\varphi_0)$, поставить в соответствие функцию $\varphi : [-r,0] \to \mathbb{E}^n$, определяемую формулами: $\varphi(s) = \tilde{\varphi}(s)$ при $-r \le s < 0$ и $\varphi(0) = \varphi_0$. В дальнейшем мы будем отождествлять эту функцию с парой. Тем самым мы превращаем гильбертово пространство $\mathbb{H}$ в пространство функций и можем написать $\mathbb{H} = \mathbb{H}([-r,0],\mathbb{E}^n)$. Тогда для функций $\varphi,\psi \in \mathbb{H}([-r,0],\mathbb{E}^n)$ скалярное произведение можно определить формулой (2.1). Учитывая определения пространств $\mathbf{C} = \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n)$ и $\mathbb{H} = \mathbb{H}([-r,0],\mathbb{E}^n)$, второе пространство можно рассматривать как непрерывное расширение первого пространства. При построении данного расширения мы остались в пространстве функций, заданных на отрезке $[-r,0]$. Нам кажется, что предложенная конструкция построения непрерывного расширения пространства непрерывных функций на специальное гильбертово пространство проще конструкции, которая традиционно используется в работах по теории дифференциальных уравнений с последействием [11]. В этих работах пространство $\mathbb{H} = \mathbf{L}_2([-r,0],\mathbb{E}^n) \times \mathbb{E}^n$ является более сложным объектом, элементы которого представляют собой пары, составленные из независимых неоднородных компонент: функции и вектора. В этом подходе при построении непрерывного расширения на гильбертово пространство $\mathbb{H} = \mathbf{L}_2([-r,0],\mathbb{E}^n) \times \mathbb{E}^n$ для пространства непрерывных функций $\mathbf{C} = \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n)$ приходится вводить вспомогательное пространство $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n) \times \mathbb{E}^n$. Более простая природа элементов пространства $\mathbb{H}$ в нашей конструкции облегчает применение ее в данной работе.

Построенное расширение пространства непрерывных функций на специальное гильбертово пространство позволяет поставить задачу о непрерывном продолжении степени оператора монодромии $U^m$ $(m\omega \ge 2r)$ с пространства непрерывных функций $\mathbf{C} = \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n)$ на специальное гильбертово пространство $\mathbb{H} = \mathbb{H}([-r,0],\mathbb{E}^n)$. Используя формулу для общего решения дифференциального уравнения с последействием [1, с.180], находим явный вид степени оператора монодромии $U^m$ $(m\omega \geq 2r)$:

$$(U^m\varphi)(\vartheta) = V(m\omega+\vartheta, 0)\varphi(0) + \int_{-r}^{-0} d_t(\int_0^{m\omega+\vartheta} V(m\omega+\vartheta, s)\eta(s, t-s)ds)\varphi(t),$$

$$\vartheta \in [-r, 0],\ \varphi \in \mathbf{C}([-r, 0], \mathbb{E}^n). \tag{2.2}$$

Здесь матричная функция $V(\cdot,\cdot)$ при каждом фиксированном значении второго аргумента $s \in [0, \infty)$ локально абсолютно непрерывна по первому аргументу $t$ на полуинтервале $[s, +\infty)$, при каждом фиксированном значении первого аргумента $t \in (0, \infty)$ имеет конечную вариацию по второму аргументу $s$ на отрезке $[0, t]$, удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial V(t,s)}{\partial t} = \int_{-r}^{0} d_\tau \eta(t, \tau) V(t+\tau, s), \quad 0 \leq s \leq t < \infty,$$

$$V(t,s) = I_n - \int_s^t V(t,\tau)\eta(\tau, s-\tau)d\tau, \quad 0 \leq s \leq t < \infty, \tag{2.3}$$

и начальным условиям $V(t,s) = 0$ при $s - r \leq t < s$, $V(s,s) = I_n$, $s \in \mathbb{R}^+$. Здесь $I_n$ — единичная матрица размерности $n \times n$. В формулах (2.2) и (2.3) при каждом фиксированном значении $\tau \in [0, +\infty)$ с помощью формулы $\eta(\tau, z) = \eta(\tau, -r)$ доопределены значения функции $\eta$ при $-\infty < z \leq -r$.

**Теорема 2.1.** *Если $m\omega \geq 2r$ и для любого числа $0 < t \leq m\omega$ производная функции $\int_0^t \eta(z, s-z)dz$ по аргументу $s$ ограничена в существенном на отрезке $[-r, 0]$, то оператор $U^m$ $(m\omega \geq 2r)$ можно продолжить по непрерывности на пространство $\mathbb{H}$.*

**Доказательство.** Используя уравнение (2.3), можно показать, что матричная функция $V(\cdot,\cdot)$, при каждом фиксированном значении первого аргумента $r \leq t \leq m\omega$, имеет производную по второму аргументу, ограниченную в существенном на отрезке $[0, t]$. Тогда при каждом фиксированном значении $\vartheta \in [-r, 0]$ интеграл $\int_0^{m\omega+\vartheta} V(m\omega+\vartheta, s)\eta(s, t-s)ds$ допускает представление

$$\int_0^{m\omega+\vartheta} V(m\omega+\vartheta, s)\eta(s, t-s)ds = \int_0^{m\omega+\vartheta} \eta(\alpha, t-\alpha)d\alpha -$$

$$-\int_0^{m\omega+\vartheta} \frac{\partial V(m\omega+\vartheta, s)}{\partial s} \int_0^s \eta(\alpha, t-\alpha)d\alpha ds$$

и определяет абсолютно непрерывную функцию аргумента $t$ с ограниченной в существенном производной на отрезке $[-r,0]$. Поэтому продолжение оператора $U^m$ $(m\omega \geq 2r)$ на пространство $\mathbb{H}$ определяется формулой

$$(W\varphi)(\vartheta) = V(m\omega+\vartheta,0)\varphi(0) +$$

$$+\int_{-r}^{0}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_0^{m\omega+\vartheta} V(m\omega+\vartheta,s)\eta(s,t-s)ds\Big)\varphi(t)dt,$$

$$\vartheta \in [-r,0],\ \varphi \in \mathbb{H} = \mathbb{H}([-r,0],\mathbb{E}^n). \tag{2.4}$$

**Замечание.** Условия теоремы 2.1 не выполнены для функции $\eta$:

$$\eta(t,s) = 1 - 1(t+s+r/2),\ 0 \leq t < r/2,\ s \in [-r,0].$$

Функция $\eta$ периодически зависит от $t$ с периодом $\omega = r/2$. Здесь символ $1(\cdot)$ обозначает функцию Хевисайда. Для выбранной функции $\eta$ формула (2.2) принимает вид

$$(U^m\varphi)(\vartheta) = V(m\omega+\vartheta,0)\varphi(0) - \int_0^{r/2} V(m\omega+\vartheta,s)ds\varphi(-r/2),$$

$$\vartheta \in [-r,0],\ \varphi \in \mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n),\ m \geq 4.$$

Полученная формула показывает, что оператор $U^m$, $m \geq 4$, не может быть продолжен по непрерывности на пространство $\mathbb{H}$.

Дальше мы ограничимся рассмотрением только расширения степени оператора монодромии $U^m$ $(m\omega \geq 2r)$ с пространства $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n)$ на пространство $\mathbb{H}$. Поэтому для расширения оператора $U^m$ с пространства $\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{E}^n)$ на пространство $\mathbb{H}$ мы будем вместо $W$ использовать обозначение $U^m$, подразумевая, что этот оператор действует уже в пространстве $\mathbb{H}$.

При выполнении условий теоремы 2.1 оператор $U^m$ является оператором Гильберта–Шмидта. Занумеруем собственные числа $\varrho_j$ $(j=1,2,\ldots)$ оператора $U^m$ в порядке неубывания модулей. В случае конечной последовательности дополняем ее до бесконечной нулями. Для собственных чисел оператора Гильберта–Шмидта выполняется условие $\sum_{j=1}^{\infty}|\varrho_j|^2 < \infty$. Целую функцию для характеристического уравнения $D(z)=0$, $z \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел), можно определить по формуле Вейерштрасса $D(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1-z\varrho_j)\exp(z\varrho_j)$, $z \in \mathbb{C}$. Конструктивные методы нахождения характеристического уравнения связаны с задачей аппроксимации оператора $U^m$ конечномерными операторами в равномерной операторной топологии.

**Теорема 2.2.** *Если выполняются условия теоремы* 2.1, *то в произвольной ограниченной замкнутой области комплексной плоскости функция* $D(z)$ *может быть найдена как равномерный предел целых функций специального вида:*

$$D(z) = \lim_{n\to\infty}\Big(det\,\|\delta_{jk} - z(U^m\varphi_j,\varphi_k)\|_1^n \exp(z\sum_{j=1}^{n}(U^m\varphi_j,\varphi_j))\Big). \qquad (2.5)$$

*Здесь* $\|\varphi_k\|_1^\infty$ *— ортонормированный базис пространства* $\mathbb{H}$.

**Доказательство.** Утверждение теоремы следует из свойств аппроксимаций оператора $U^m$ конечномерными операторами $V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определяемыми формулами $V_n\varphi = \sum_{j=1}^{n}(\varphi,\varphi_j)U^m\varphi_j$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Эта последовательность операторов стремится по равномерной операторной норме к оператору $U^m$, и при соответствующей нумерации собственных чисел операторов $V_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ они стремятся к собственным числам оператора $U^m$ при $n \to +\infty$ [9, с.213].

В задачах устойчивости нет необходимости находить целую функцию $D(z)$ на всей комплексной плоскости. Достаточно найти ее в области комплексной плоскости, содержащей круг единичного радиуса с центром в точке $z = 0$. Поэтому можно воспользоваться аппроксимацией оператора $U^m = V_n + R_n$, в которой конечномерный оператор фиксированной размерности $n$ определяется формулой $V_n = \sum_{j=1}^{n}(\cdot,\psi_j)\varphi_j$, а оператор $R_n$ имеет норму меньше единицы. Здесь $\|\varphi_j\|_1^n$ и $\|\psi_j\|_1^n$ — линейно независимые системы элементов пространства $\mathbb{H}$. Так как норма оператора $R_n$ меньше единицы, то на комплексной плоскости существует область, содержащая круг единичного радиуса с центром в точке $z = 0$, для любой точки $z$ которой существует ограниченный оператор $(I - zR_n)^{-1}$ ($I$ — единичный оператор). Обозначим эту область буквой $G$ и определим в ней систему функций $\Phi_j(z) = (I - zR_n)^{-1}\varphi_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ со значениями в пространстве $\mathbb{H}$. Функции $\Phi_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n)$ являются аналитическими в области $G$.

**Теорема 2.3.** *Если выполняются условия теоремы* 2.1, *то в области* $G$ *корни характеристического уравнения и только они совпадают с корнями уравнения*

$$det\,\|\delta_{ij} - z(\Phi_j(z),\psi_j)\|_1^n = 0. \qquad (2.6)$$

**Доказательство.** В области $G$ уравнение $(I - z(V_n + R_n))\varphi = \varphi$ эквивалентно уравнению $(I - z(I - zR_n)^{-1}V_n)\varphi = (I - zR_n)^{-1}\varphi$. При каждом фиксированном значении параметра $z$ система элементов $\Phi_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n)$ пространства $\mathbb{H}$ линейно независима. Поэтому утверждение теоремы справедливо.

Мы получили новую форму характеристического уравнения в области $G$. Характеристическое уравнение определяется формулой (2.6), левая часть в которой является аналитической функцией в области $G$. Поэтому обратные величины ненулевых собственных чисел оператора $U^m$ $(m\omega \geq 2r)$ и только они являются нулями найденной аналитической функции в области $G$.

Отметим важный случай, когда оператор $R_n$ является вольтерровым. Тогда функции $\Phi_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n)$ являются целыми, уравнение (2.6) порождается целой функцией и является уже характеристическим уравнением на всей комплексной плоскости.

В определении целой функции для характеристического уравнения и в формуле (2.5) наличие экспоненциальных множителей связано с необходимостью регуляризации алгоритмов нахождения целой функции характеристического уравнения для операторов Гильберта–Шмидта. От этой неприятности можно избавиться, если рассматриваемый оператор $U^m$ принадлежит к классу ядерных операторов [9, с.125]. Для собственных чисел ядерного оператора выполняется условие $\sum_{j=1}^{\infty} |\varrho_j| < \infty$.

**Теорема 2.4.** *Если $m\omega \geq 2r$ и для любого числа $0 < t \leq m\omega$ вторая производная функции $\int_0^t \eta(z, s - z)dz$ по аргументу $s$ ограничена в существенном на отрезке $[-r, 0]$, то оператор $U^m$ является ядерным.*

**Доказательство.** Выполнены условия теоремы 2.1. Оператор $U^m$ в пространстве $\mathbb{H}$ определяется формулой (2.4), и ядро $K$ его интегральной составляющей допускает представление

$$K(\vartheta, t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{m\omega+\vartheta} V(m\omega + \vartheta, s)\eta(s, t - s)ds =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_0^{m\omega+\vartheta} \eta(\alpha, t - \alpha)d\alpha - \int_0^{m\omega+\vartheta} \frac{\partial V(m\omega + \vartheta, s)}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^s \eta(\alpha, t - \alpha)d\alpha ds,$$

$$\vartheta, t \in [-r, 0].$$

Учитывая условия настоящей теоремы, убеждаемся, что при каждом фиксированном значении $\vartheta \in [-r, 0]$ матричная функция $K(\vartheta, \cdot)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-r, 0]$ и ее производная по аргументу $t$ ограничена в существенном на этом отрезке. Этого достаточно для ядерности оператора (2.4) [9, с.154].

При выполнении условий теоремы 2.4 целая функция $D(z)$ в характеристическом уравнении определяется формулой $D(z) = \prod_{j=1}^{\infty}(1 - z\varrho_j)$. Конструктивный метод нахождения характеристического уравнения в случае ядерности оператора $U^m$ дается следующим утверждением.

**Теорема 2.5.** *Если выполняются условия теоремы* 2.4*, то в произвольной замкнутой ограниченной области комплексной плоскости функция* $D(z)$ *может быть найдена как равномерный предел полиномов*

$$D(z) = \lim_{n\to\infty} det \, \|\delta_{jk} - z(U^m\varphi_j, \varphi_k)\|_1^n.$$

*Здесь* $\|\varphi_k\|_1^\infty$ *– ортонормированный базис пространства* $\mathbb{H}$.

**Доказательство** повторяет доказательство теоремы 2.2.

Как мы знаем, для асимптотической устойчивости решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа степени оператора монодромии $U^m$ ($m\omega \geq 2r$) по модулю были меньше единицы. Эти требования выполнены, если все корни характеристического уравнения по модулю больше единицы. Алгебраическую задачу нахождения условий, при выполнении которых все нули целой (или аналитической) функции лежат вне единичного круга (т.е. круга единичного радиуса с центром в точке $z = 0$ на комплексной плоскости), назовем проблемой Рауса–Гурвица (в случае единичного круга) для целой (или аналитической) функции. Полученные результаты позволяют сводить задачу асимптотической устойчивости решений линейной периодической системы дифференциальных уравнений с последействием к проблеме Рауса–Гурвица (в случае единичного круга) для целой (или аналитической) функции.

### Литература

1. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

2. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

3. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.

4. Шиманов С.Н. К теории линейных дифференциальных уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1965. Т.1, №1. С.102–116.

5. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1960.

6. Гасилов Г.Л. О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздыванием // Изв. вузов. Математика. 1972. №4. С.60–66.

7. Долгий Ю.Ф. О построении характеристического уравнения для дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным запаздыванием// Устойчивость и нелинейные колебания. Свердловск: УрГУ, 1979. С.34–41.

8. Долгий Ю.Ф. Представление оператора монодромии в виде суммы конечномерного и вольтеррова операторов // Докл. РАН. 1994. Т.334, №2. С.138-141.

9. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

10. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.

11. Шиманов С.Н. Некоторые вопросы теории колебаний систем с запаздыванием // Пятая летняя матем. шк. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. С.473–549.

*Статья поступила 12.11.1992 г.;*
*окончательный вариант 01.04.1998 г.*